

# 係数図法 制御系設計の理論と応用

真鍋舜治

August 6, 2009

# Chapter 2

## 係数図法の基礎

本章では係数図法による設計をすすめるための基礎について述べる。まず数学的関係では、記号の定義とそれらの関係を説明する。係数図では係数図の作り方とその解釈を説明する。安定条件ではラウスの安定条件を簡単化した、リパトフの安定十分条件・不安定十分条件について述べる。これが係数図法の数学的根拠である。正準伝達関数では特性多項式と特別の関係にある伝達関数を正準伝達関数と定義し、これをもとにして一般の伝達関数の性質を論じることができるよう準備した。標準形では、係数図法で推奨する標準形を示し、その極配置と時間応答を論じた。ロバスト性への配慮では、ロバスト性を失う原因について簡単に述べ、条件により標準形をどのように改修すべきかについて指針をあたえる。これらの基礎知識を用いれば、係数図法の設計を効率的に進めることができる。最後に本章のまとめを行った。

### 2.1 数学的関係

本節では係数図法で用いられる重要な用語と記号を定義し、それらの間の数学的関係を導出する。これらの関係は設計のときに用いて便利である。特性多項式 $P(s)$ はつぎのように表される。

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i s^i. \quad (2.1)$$

安定度指標 $\gamma_i$ 、等価時定数 $\tau$ 、限界値 $\gamma_i^*$ を次のように定義する。

$$\gamma_i = a_i^2 / (a_{i+1} a_{i-1}), \quad i = 1 \cdots n - 1. \quad (2.2)$$

$$\tau = a_1 / a_0. \quad (2.3)$$

$$\gamma_i^* = 1 / \gamma_{i+1} + 1 / \gamma_{i-1}, \quad i = 1 \cdots n - 1, \quad \gamma_n = \gamma_0 = \infty. \quad (2.4)$$

ここで安定度指標は安定性の尺度であり、等価時定数が応答速度の尺度であることは、既に述べた。限界値は新しく導入されたもので、安定性をより正

確に表すために用いられる。この定義式で  $\gamma_n$  と  $\gamma_0$  は  $\infty$  と定義しているが、これにより式 (2.4) は  $\gamma_{n-1}^*$  と  $\gamma_1^*$  まで矛盾なく使用できる。また  $n$  次の特性多項式では係数  $a_{n+1}$  と  $a_{-1}$  はともに零と考えるのが妥当であり、式 (2.2) と矛盾しない。等価時定数の概念を拡張して、第  $i$  次の等価時定数  $\tau_i$  を次のように定義する。

$$\tau_i = a_{i+1}/a_i, \quad i = 1 \cdots n-1. \quad (2.5)$$

式 (2.2)(2.3) より次の関係が得られる。

$$\tau_i = \tau_{i-1}/\gamma_i = \tau/(\gamma_i \cdots \gamma_2 \gamma_1). \quad (2.6)$$

$$a_i = \tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 \tau a_0 = a_0 \tau^i / (\gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \cdots \gamma_2^{i-2} \gamma_1^{i-1}). \quad (2.7)$$

この結果特性多項式は  $a_0$ 、 $\tau$ 、 $\gamma_i$  によって次のように表される。

$$P(s) = a_0 \left[ \left\{ \sum_{i=2}^n \left( \prod_{j=1}^{i-1} 1/\gamma_{i-j}^j \right) (\tau s)^i \right\} + \tau s + 1 \right]. \quad (2.8)$$

ここで特性多項式が  $(\tau s)$  のべき乗と、安定度指標よりなる係数で表されていることに注意したい。この形より、応答波形は安定度指標で決まってしまう、等価時定数はその時間尺だけを決めていることがわかる。また式 (2.5) (2.6) より、次のような隣接する係数の関係が得られる。

$$\frac{a_i a_j}{a_{i+1} a_{j-1}} = \gamma_i \gamma_{i-1} \cdots \gamma_j, \quad i > j. \quad (2.9)$$

また 2 次の安定度指標を次のように定義する。

$$\gamma_{i2} = a_i^2 / (a_{i+2} a_{i-2}) = \gamma_{i+1} \gamma_i^2 \gamma_{i-1}, \quad i = 2 \cdots n-2. \quad (2.10)$$

この指標は安定性の概略を評価するのに有効である。式 (2.2) より次のような安定度指標の比に関する関係が得られる。

$$\gamma_{i-1}/\gamma_{i+1} = (a_{i-1}/a_{i+1})^2 / (a_{i-2}/a_{i+2}), \quad i = 2 \cdots n-2. \quad (2.11)$$

この関係は、係数図の曲率が  $a_i$  の周りで対称である度合いを示すもので、1 のとき完全に対称になる。このときは右辺の関係は、係数図上で  $a_{i+1}$  と  $a_{i-1}$  を結ぶ線が  $a_{i+2}$  と  $a_{i-2}$  を結ぶ線と平行になることを示しており、係数図は滑らかな形になる。このような特性多項式は一般に望ましい特性を示すものである。次に幾つかの有用な係数の関係を示す。式 (2.7) に対応して、 $a_i$  より  $a_0$  を求める式は次のようになる。

$$a_0 = a_i / (\tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 \tau) = \frac{a_i}{(\tau_{i-1}^i)(\gamma_{i-1}^{i-1} \gamma_{i-2}^{i-2} \cdots \gamma_2^2 \gamma_1)}. \quad (2.12)$$

この式は高次項の情報をもとにして、特性多項式全体を構築するときに便利である。式 (2.7) (2.12) は、次のような形に一般化される。

$$a_{i+j}/a_i = \tau_{i+j-1}\tau_{i+j-2}\cdots\tau_i = \frac{\tau_i^j}{\gamma_{i+j-1}\gamma_{i+j-2}^2\cdots\gamma_{i+1}^{j-1}}. \quad (2.13)$$

$$a_{i-j}/a_i = 1/(\tau_{i-1}\tau_{i-2}\cdots\tau_{i-j}) = \frac{1}{(\tau_{i-1}^j)(\gamma_{i-1}^{j-1}\gamma_{i-2}^{j-2}\cdots\gamma_{i-j+1})}. \quad (2.14)$$

これらの式を用い、 $j$  次の安定度指標が次のように表される。

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= a_i^2/(a_{i+j}a_{i-j}), \\ &= (\gamma_{i+j-1}\gamma_{i-j+1})\cdots(\gamma_{i+1}\gamma_{i-1})^{j-i}\gamma_i^j, \quad i+j \leq n, \quad i-j \geq 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

最後に安定度指標  $\gamma_i$  とそれに対応する減衰定数  $\zeta_i$  の関係についてのべる。詳細は後に述べるが、近似的に次のような関係がある。

$$\zeta_i \simeq 0.5\sqrt{\gamma_i}(1 - \gamma_i^*/\gamma_i). \quad (2.16)$$

従って  $\zeta_i$  は、 $\gamma_i^*/\gamma_i$  が小さくて 2 次系に近いときは、 $0.5\sqrt{\gamma_i}$  となるが、2 次系から離れるとそれより小さくなる。

## 2.2 係数図

本節では、係数図法で重要な役割を果たす係数図について説明を行う。まず係数図の構造について述べ、特性多項式の係数図が、幾つかの要素多項式で構成されていることを示す。次に簡単な係数図の例を示し、係数図の描き方と、それより制御系の重要な3特性、安定性・応答性・ロバスト性を読み取る方法について述べる。最後にロバスト性を失う構造についてのべる。係数図法による設計は、一般にはロバスト性が高く、設計にあたってロバスト性に、注意する必要はないが、特殊な問題ではロバスト性が問題となることがある。このような時には、係数図に特殊な特徴が表れる。またロバスト制御理論との関係についても簡単に言及する。

まず係数図がどのような要素で構成されているか、即ち係数図の構造について説明する。1.4節で述べたように、特性多項式  $P(s)$  は、開ループ伝達関数  $G(s)$  の分母多項式  $A_{cp}(s)$  と分子多項式  $B_{cp}(s)$  の和として表される。

$$\begin{aligned} P(s) &= A_{cp}(s) + B_{cp}(s), & G(s) &= B_{cp}(s)/A_{cp}(s), & (2.17) \\ A_{cp}(s) &= A_c(s)A_p(s), & B_{cp}(s) &= B_c(s)B_p(s). \end{aligned}$$

説明を簡単にするため、制御器は1/1次（分子1次、分母1次）とする。

$$A_{cp}(s) = (l_1s + l_0)A_p(s), \quad B_{cp}(s) = (k_1s + k_0)B_p(s). \quad (2.18)$$

これより

$$\begin{aligned} P(s) &= P_{l_1}(s) + P_{l_0}(s) + P_{k_1}(s) + P_{k_0}(s), & (2.19) \\ P_{l_1}(s) &= l_1sA_p(s), \quad P_{l_0}(s) = l_0A_p(s), \\ P_{k_1}(s) &= k_1sB_p(s), \quad P_{k_0}(s) = k_0B_p(s). \end{aligned}$$

ここで  $P_{l_1}(s)$  は、係数図上では  $A_p(s)$  を1次左に動かし、 $l_1$ 分だけ上下したものの、 $P_{l_0}(s)$  は、 $A_p(s)$  を $l_0$ 分だけ上下したものになる。 $P_{k_1}(s)$  と  $P_{k_0}(s)$  は、 $B_p(s)$  について同様なことを行ったものである。すなわち特性多項式  $P(s)$  は、 $A_p(s)$  と  $B_p(s)$  を水平方向に動かし、さらに上下方向に動かして、生成した4個の要素多項式の和になっている事が分かる。

1/1次ではなく一般の制御器では、特性多項式は制御器パラメータの数だけの要素多項式で構成される。このように要素多項式に分解して考えると、特性多項式に影響を及ぼす要素多項式、すなわち調整が有効に行える制御器パラメータを、容易に特定できることになる。また要素多項式の数が多くて、見通しをたてるのが難しいときは、それらを分母要素多項式  $P_l(s)$ ・分子要素多項式  $P_k(s)$  の2個に集約する。

$$\begin{aligned} P_l(s) &= P_{l_1}(s) + P_{l_0}(s) = A_{cp}(s), & (2.20) \\ P_k(s) &= P_{k_1}(s) + P_{k_0}(s) = B_{cp}(s). \end{aligned}$$

この形はロバスト性の検証に用いて便利である、さらに4章で示すように周波数応答・ステップ応答の予測に用いられる。

次に簡単な例により、係数図の作りかたと安定性・応答性・ロバスト性の読み取り方について説明を行う。制御対象分母・分子多項式が次のように与えられている。

$$A_p(s) = 0.25s^4 + s^3 + 2s^2 + 0.5s, \quad B_p(s) = 1. \quad (2.21)$$

これに対して次のような2/1次の制御器(PID制御器)が取り付けられている。

$$\begin{aligned} A_c(s) &= l_1s, \quad B_c(s) = k_2s^2 + k_1s + k_0, \\ l_1 &= 1, \quad k_2 = 1.5, \quad k_1 = 1, \quad k_0 = 0.2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

このとき要素多項式は次のようになる。

$$\begin{aligned} P_l(s) &= A_{cp}(s) = 0.25s^5 + s^4 + 2s^3 + 0.5s^2, \\ P_k(s) &= B_{cp}(s) = 1.5s^2 + s + 0.2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

特性多項式は次のようになる。

$$P(s) = 0.25s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 0.2. \quad (2.24)$$

これより次のような結果が得られる。

$$a_i = [a_5 \cdots a_2 \ a_1] = [0.25 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0.2], \quad (2.25)$$

$$\gamma_i = [\gamma_4 \cdots \gamma_2 \ \gamma_1] = [2 \ 2 \ 2 \ 2.5], \quad (2.26)$$

$$\tau = 5, \quad (2.27)$$

$$\gamma_i^* = [\gamma_4^* \cdots \gamma_2^* \ \gamma_1^*] = [0.5 \ 1 \ 0.9 \ 0.5]. \quad (2.28)$$

上記の表現で  $a_i$  は、行ベクトルを示し、かつ添え字が減少順になっている。これは特性多項式が降冪順になっていることに対応するものである。この記法は係数図法全体に対して用いられていて、 $\gamma_i$  と  $\gamma_i^*$  でも同様である。

この係数図は Fig. 2.1 に示されている。ここで係数  $a_i$  は左側の目盛りを用い、安定度指標  $\gamma_i$ ・等価時定数  $\tau$ ・限界値  $\gamma_i^*$  は右側の目盛りを用いる。また  $\tau$  は  $i=0$  での1の点と  $i=1$  での  $\tau$  の点を結ぶ直線で表す。これは係数図で  $a_1$  と  $a_0$  を結ぶ直線を平行移動したものになっている。なお係数・安定度指標・等価時定数は点と実線で、限界値は点と点線で示す。また  $P_l(s)$  は丸印と鎖線、 $P_k(s)$  は四角印と点線で示す。

安定度指標は Fig. 2.2 に示すように図から求めることができる。すなわち  $\gamma_i$  を求めるには、 $a_{i+1}$  と  $a_i$  を結ぶ直線を  $i-1$  まで延長し  $a_{i-1}$  との差を対

数目盛りで読めばよい。これより安定度指標が、特性多項式の係数図の曲率に比例していることが分かる。Fig. 2.2 に示すように係数図の曲率が大きくなると、安定度指標  $\gamma_i$  が大きくなり安定性が増す。このように特性多項式の係数図の曲率より、安定性を評価することができる。

また Fig. 2.3 に示すように係数図が左下がりになると、等価時定数  $\tau$  が小となり、応答がはやくなる。2.1 節で述べたように、等価時定数が応答速度を規定するものになっているからである。このように係数図の全体の傾きから、応答速度を評価できる。

ロバスト性について、現在色々な定義があるが、係数図法では、「制御対象と制御器のパラメータ変動に対してシステムの安定度が損なわれない度合いを示すもの」と定義する。簡単にいえば、これらのパラメータ変動に対して、特性多項式の重要な部分の形が、あまり変化しないときは、ロバスト性が高く、変化が激しいときは、ロバスト性は低い。パラメータ変動はまず要素多項式、この例では  $P_l(s)$  と  $P_k(s)$ 、の形の変化に現れ、さらに特性多項式の係数図の変化に現れる。係数図法ではパラメータ変動に対する特性多項式の変化を、視覚的に容易に読み取ることができ、ロバスト性の評価を簡単に行うことができる。このように係数図法では、ロバスト性を論じるときには、変動するパラメータを特定し、それに対するロバスト性を論じるのが通例であり、ロバスト制御理論の用語を用いれば「構造的不確かさ」が対象になっている。

ロバスト性を失う構造について次に考察する。係数図法による設計は、一般にはロバスト性が高いが、システムが特殊な構造になると、ロバスト性が劣化する。このような特殊構造について検討してみよう。

係数図法で標準的に用いている特性多項式では、特定の係数 1 個の変化に対するロバスト性は高く、一般に略 0.5 ~ 3 倍の変化に対して安定である。ただし  $a_n$  と  $a_0$  では下限が 0 倍まで、 $a_{n-1}$  と  $a_1$  では略 0.26 倍まで広がる。今係数  $a_i$  の変動量を  $\delta a_i$  とすれば、次のような式で近似的に表される。

$$0a_i(i = n, 0), 0.26a_i(i = n - 1, 1), 0.5a_i(n - 2 \geq i \geq 2) < a_i + \delta a_i < 3a_i. \quad (2.29)$$

変化の割合  $\delta a_i/a_i$  を用いれば、安定な範囲は次のような近似式で表される。

$$-1(i = n, 0), -0.74(i = n - 1, 1), -0.5(n - 2 \geq i \geq 2) < \frac{\delta a_i}{a_i} < 2. \quad (2.30)$$

これよりロバスト性の検討に必要なのは、 $a_i$  を減少させるような変化であって、増大させる方向のものはあまり注意しなくてもよいことがわかる。ここで  $a_i$  を減少させる要因は、一つは負帰還制御が弱くなること、今一つは正帰還が強くなることである。とくに正帰還の存在がロバスト性の劣化に大きな役割を果たしている。

検討を容易にするため、前述の要素多項式を一般的な記号で表す。

$$P_l(s) = c_5 s^5 + c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2, \quad (2.31)$$

$$P_k(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0. \quad (2.32)$$

この例では特性多項式の係数は、 $a_2$  を除き、大部分は要素多項式の係数そのものになっているので、それら係数の変化割合は要素多項式の係数の変化割合に等しい。しかし  $a_2$  では次のような関係になる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta a_2}{a_2} &= (c_2/a_2) \frac{\delta c_2}{c_2} + (b_2/a_2) \frac{\delta b_2}{b_2}, \\ &= (0.5/2) \frac{\delta c_2}{c_2} + (1.5/2) \frac{\delta b_2}{b_2}, \\ &= 0.75 \frac{\delta b_2}{b_2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

ここでパラメータ変動は  $b_2$  のみに起こっていると考えている。ここでは特性多項式の係数の変化割合は要素多項式の係数の変化割合より小さい。安定限界に相当する  $\delta a_2/a_2$  を  $-0.5$  とすると、 $\delta b_2/b_2$  では  $-0.6667$  となり、許容範囲はひろくなっている。このとき Fig. 2.1 の係数図で示されているとおり、 $b_2$  の点が  $a_2$  の点より下にある。このような時は要素多項式のパラメータ変化の影響は緩和され、ロバスト性が高くなる。

一般的に要素多項式の係数の点が、特性多項式の係数の点より下にあるときは、特性多項式の係数の変化割合は、要素多項式の係数の変化割合より小さくなり、ロバスト性は高くなる。この例では特性多項式の係数の変化割合は、対応する要素多項式の係数の変化割合と同じかそれ以下なので、ロバスト性は十分高いといえる。

次にロバスト性の低い例を示す。要素多項式が次のような場合は、特性多項式は変わらない。

$$P_l(s) = 0.25s^5 + s^4 + 2s^3 + 6s^2, \quad (2.34)$$

$$P_k(s) = -4s^2 + s + 0.2. \quad (2.35)$$

しかし  $b_2$  に対する  $a_2$  の変化割合は次のように大きくなる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta a_2}{a_2} &= (c_2/a_2) \frac{\delta c_2}{c_2} + (b_2/a_2) \frac{\delta b_2}{b_2}, \\ &= (6/2) \frac{\delta c_2}{c_2} + (-4/2) \frac{\delta b_2}{b_2}, \\ &= -2 \frac{\delta b_2}{b_2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

要素多項式の係数の変化割合の2倍の変化割合で特性多項式の係数が変化し、ロバスト性が低くなっている事が分かる。安定限界に相当する  $\delta a_2/a_2$  を



$-0.5$  とすると、 $\delta b_2/b_2$  では  $0.25$  となり、許容範囲は狭くなっている。このとき  $b_2 = -4$  なので、係数図上ではこの点は  $a_2 = 2$  の点より上にある。なお  $b_2 = -4$  のように負数の場合は、点は絶対値の所に取り、 $(-)$  という記号をつけてそれが負数であることを示すことと定めてある。すなわち要素多項式の係数の絶対値が特性多項式の係数より大きいことが、ロバスト性の低下の原因である。

このとき特性多項式の係数は、符号の異なる要素多項式の係数で構成され、二つの大きな数の差の形になっている。このように差の形になることが、ロバスト性を低下させる、基本的な構造であって、Fig. 2.4 の係数図に示すように、要素多項式係数が、特性多項式の係数より上に位置することで示される。

最後に係数図法で用いている「構造的不確かさ」とロバスト制御理論の「非構造的な不確かさ」との関係について、例を用いて略述する。相補感度関数  $T(s)$  は次のように示される。

$$T(s) = \frac{P_k(s)}{P(s)}. \quad (2.37)$$

先に示した例では次のようになる。

$$T(s) = \frac{1.5s^2 + s + 0.2}{0.25s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 0.2} \quad (2.38)$$

この相補感度関数の周波数特性を求めると、略  $0.8 \text{ rad/sec}$  で、振幅は最大値  $1.61$  となるので、許容される不確かさは  $1/1.61 = 0.621$  となる。またロバスト性を低下させた例では次のようになる。

$$T(s) = \frac{-4s^2 + s + 0.2}{0.25s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 0.2} \quad (2.39)$$

この時は、略  $0.8 \text{ rad/sec}$  振幅は最大値  $4.19$  と大きくなり、許容される不確かさは  $1/4.19 = 0.238$  と小さくなっている。ロバスト制御理論に基づく不確かさの許容限界が、係数図法による  $\delta b_2/b_2$  の許容限界、 $-0.6667$  および  $0.25$  と同じような値になっていることに注目したい。このように係数図法を用いると、ロバスト性についてより細かな検討が行えるが、またロバスト制御理論の結果も包含しているのである。またロバスト制御理論でロバスト性が低いときは、相補感度関数が大きくなるということは、係数図上では要素多項式の係数の点が特性多項式の係数の点より上にあることに相当する。

以上述べたように、係数図は、その曲率で安定性を、傾斜で応答速度を、要素多項式との比較でロバスト性を表している。これらの3特性を一つの図で表現していることが、係数図の大きな特徴であり、現在広く用いられているボ - デ線図に代わりうるものである。実際の設計段階で用いるときは、ボ - デ線図より正確で使いやすい。

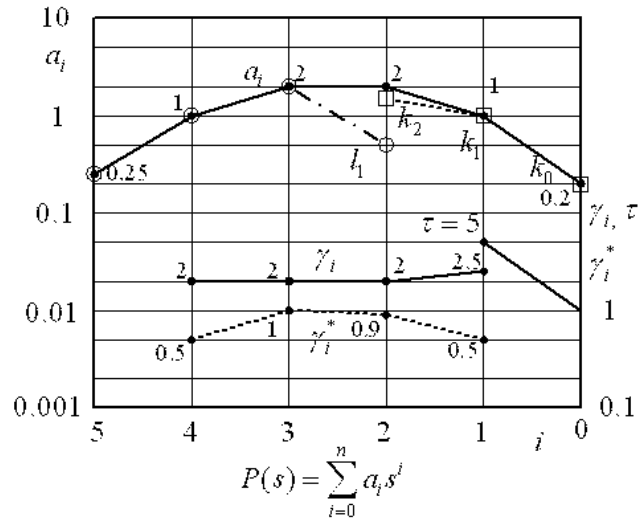


Figure 2.1: Coefficient diagram

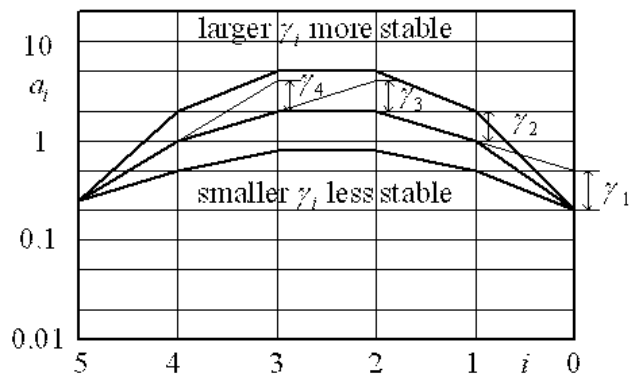


Figure 2.2: Effect of  $\gamma_i$

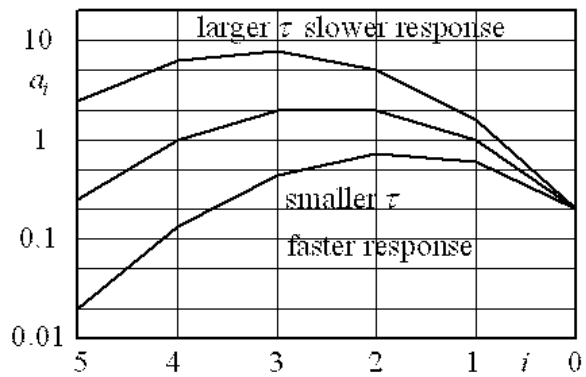


Figure 2.3: Effect of  $\tau$

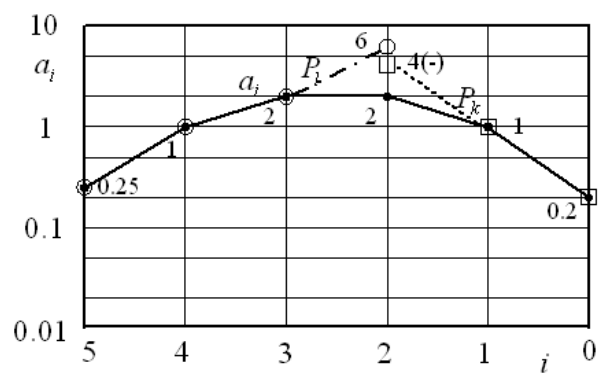


Figure 2.4: Unrobust example

## 2.3 安定条件

本節では、係数図法で用いる安定条件、リパトフの安定・不安定十分条件について説明する。これはラウスの安定条件を簡略化したもので、係数図法での設計に用いて大変便利である。なかでも、リパトフの安定十分条件が特に重要で、係数図法の理論的基礎になっている。まず係数図法に適した表現でのラウスの安定条件について述べる。次に3・4次系のラウス安定条件とその係数図上での表現を示す。次にリパトフの安定・不安定十分条件について述べる。これは5次以上の系にも適用できる。正確な安定条件ではないが、簡単なので設計に用いて大変便利である。最後に安定条件の応用例を示す

ラウスの安定条件については6章で詳述するが、ここでは係数図法に適した表現に修正した、ラウスの安定条件について述べる。まず  $n$  次の特性多項式  $P_n(s)$  が与えられる。ここで便宜上  $n$  は奇数とする。特性多項式の係数は全て正数とする。正数でなければ不安定であることが、明らかであるからである。

$$P_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \quad (2.40)$$

これより  $n-1$  次の特性多項式  $P_{n-1}(s)$  を次のようにして作る。

$$\begin{aligned} P_{n-1}(s) &= a_{n-1} s^{n-1} + a'_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \cdots + a_4 s^4 + a'_3 s^3 \\ &\quad + a_2 s^2 + a'_1 s + a_0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$a'_i = a_i - a_n(a_{i-1}/a_{n-1}), \quad i = n-2 \cdots 3 \ 1.$$

このとき  $P_n(s)$  と  $P_{n-1}(s)$  は安定性において等価であることが証明されていて、これがラウスの安定条件の証明の骨子である。この過程を繰り返せば最終的に  $P_2(s)$  が得られる。この過程で現れる特性多項式の係数はすべて正とする。もし負のものがあれば、その特性多項式は不安定であり、結局  $P_n(s)$  が不安定であることが分かる。 $P_2(s)$  は2次式なので、その係数がすべて正ならば安定である。従って  $P_{n-1}(s)$  から  $P_2(s)$  まで係数がすべて正ならば、 $P_n(s)$  が安定であることが分かる。なお上記で  $n$  を奇数としたが、偶数の場合は式(2.41)を次のようにすればよい。

$$\begin{aligned} P_{n-1}(s) &= a_{n-1} s^{n-1} + a'_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \cdots + a'_4 s^4 + a_3 s^3 \\ &\quad + a'_2 s^2 + a_1 s + a_0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$a'_i = a_i - a_n(a_{i-1}/a_{n-1}), \quad i = n-2 \cdots 4 \ 2.$$

$P_n(s)$  から  $P_{n-1}(s)$  を作る過程を、5次式を例にして係数図で示せば、Fig. 2.5 のようになる。まず  $a_5$  から直線  $a_4 a_2$  に平行に直線をひき、 $i=3$  と交わる点を求めると  $a'_3(a_2/a_4)$  となる。 $a_3$  からこの量を差し引くと  $a'_3$  が得られる。また  $a_5$  から直線  $a_4 a_0$  に平行に直線をひき、 $i=1$  と交わる点を求めると

$a_5(a_0/a_4)$  となる。 $a_1$  からこの量を差し引くと  $a'_1$  が得られる。係数図上で見ると、 $a'_3$  は  $a_3$  より少し小さいが、 $a'_1$  と  $a_1$  とは殆ど差がない事がすぐ分かる。ラウスの安定条件を、このような作図の形で表現しておく、記憶するのに便利である。

次に 3・4 次系のラウス安定条件について述べる。3 次系の場合、 $P_3(s)$  より  $P_2(s)$  を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} P_3(s) &= a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \\ P_2(s) &= a_2s^2 + (a_1 - a_3(a_0/a_2))s + a_0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

したがって安定条件は  $a_1 - a_3(a_0/a_2) > 0$ 、あるいは次のようになる。

$$a_2a_1 > a_3a_0. \quad (2.44)$$

また  $a_2a_1/(a_3a_0) = \gamma_2\gamma_1$  であるから、安定度指標で表現すると次のようになる。

$$\gamma_2\gamma_1 > 1. \quad (2.45)$$

4 次系の場合は、 $P_4(s)$  より  $P_3(s)$  を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} P_4(s) &= a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \\ P_3(s) &= a_3s^3 + (a_2 - a_4(a_1/a_3))s + a_1s + a_0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

3 次系の安定条件より、 $(a_2 - a_4(a_1/a_3))a_1 > a_0/a_3$  が得られ、これを整理して、次のような 4 次系の安定条件がえられる。

$$a_2 > a_4 \left( \frac{a_1}{a_3} \right) + a_0 \left( \frac{a_3}{a_1} \right) \quad (2.47)$$

この条件を安定度指標で表すことを試みよう。両辺に  $a_2$  をかけて  $(a_3a_1)$  で割ると、 $a_2^2/(a_3a_1) > (a_4a_2)/a_3^2 + (a_2a_0)/a_1^2$  となり、安定度指標と限界値の定義より、次の関係が得られる。

$$\gamma_2 > 1/\gamma_3 + 1/\gamma_1 = \gamma_2^* \quad (2.48)$$

3 次系 4 次系の安定条件は係数図上で図式表現できる。Fig. 2.6 は 3 次系の例である。点  $A$  は  $(a_2 a_1)^{0.5}$  を表し、点  $B$  は  $(a_3 a_0)^{0.5}$  を表す。従って点  $A$  が点  $B$  より上にあれば系は安定である。また点  $C$  は  $(\gamma_2 \gamma_1)^{0.5}$  なのでこれが 1 以上ならば、系は安定である。

Fig. 2.7 は 4 次系の例である。点  $A$  は  $a_4$  から直線  $a_3a_1$  に平行線を引きと  $i = 2$  と交わる点として求められる。点  $B$  は  $a_0$  から直線  $a_3a_1$  に平行線を引きと  $i = 2$  と交わる点として求められる。安定条件は  $a_2 > (A + B)$  である。

安定度指標の条件  $\gamma_2 > \gamma_2^*$  は、図から直ちに読み取れる。このように 3・4 次系のラウスの安定条件は係数図上で、分かりやすく示されるのである。

リパトフの安定・不安定十分条件は 5 次以上の系に適用される安定条件である。これは Lipatov と Sokolov によって 1978 年に提案されたものである (Lipatov, 1978)。これは十分条件のみで正確な安定条件ではないので、安定を判定できない領域が残るが、簡単であるため実用性が高い。リパトフの安定・不安定十分条件については、改めて 6 章で詳述する。これには色々な表現法があるが、係数図法に最も適した表現は次の様なものである。

「特性多項式のすべての部分 4 次式が 1.12 の余裕をもって安定ならば、その系は安定である。特性多項式の部分 3 次式が一つでも不安定ならば、その系は不安定である。」

したがって安定十分条件は次のように表される。

$$\begin{aligned} a_i &> 1.12 \left[ a_{i+2} \left( \frac{a_{i-1}}{a_{i+1}} \right) + a_{i-2} \left( \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} \right) \right], \\ \gamma_i &> 1.12\gamma_i^*, \text{ for all } i = n - 2 \cdots 2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

また不安定十分条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{i+1}a_i &< a_{i+2}a_{i-1}, \\ \gamma_{i+1}\gamma_i &< 1, \text{ for some } i = n - 2 \cdots 1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

リパトフは安定十分条件の証明で、まずすべての部分 5 次式が安定ならば、系全体が安定であることを証明した。さらに 5 次式の安定条件を 4 次式の安定十分条件に置き換えて表現を簡単化した。その過程で別の形の安定十分条件も示されているが、係数図法との適合性の観点から、この表現を採用している。なお数値の 1.12 は近似値で、正確には  $(3/4^{1/3} - 1)^{-1} = 1.1237$  である。また不安定十分条件についても、より正確な条件も提案しているが実用面を配慮して上記の表現を用いることとした。なお通例の特性多項式では、全ての部分 4 次式が安定であることを、系全体の安定条件と考えてよいことが、経験的に分かっている。

最後に安定条件の応用例について、幾つかの例を示す。Fig. 2.8 は教科書の例題を引用した 6 次系の問題である (Franklin, 1994, p. 217)。特性多項式は次のとおりである。

$$P(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4. \quad (2.51)$$

一見ただけで、最悪の点は  $[a_4 a_3 a_2 a_1]$  であることが分かる。ここで、 $A < B$  であるから、不安定十分条件を満たしており、系が不安定であることがすぐ分かる。

Fig. 2.9 は同じく 5 次系の例である (Franklin, 1994, p. 219)。特性多項式は次のとおりである。

$$P(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12. \quad (2.52)$$

一見して、最悪点は  $a_3 = 11$  であることがわかる。 $A = 23/5 = 4.6$ 、 $B = 28 \times (5/23) = 6.087$ 、 $A + B = 10.687$ 、 $11/10.687 = 1.0293$  となるからリパトフの安定十分条件は満たしていない。また不安定十分条件を満たしていないことも、一見してすぐ分かる。実際この系は安定限界にあって、 $\pm j2$  に虚根をもっている。また  $(a_2/a_4)^{0.5} = 2.145$  が、この虚根に近いことは、注目すべき点である。この例からも、部分 4 次式の安定条件が、系全体の安定条件と略等しいということが言えることがわかる。

Fig. 2.10 には、次数の高い場合で 10 次系の二つの例を示す。それぞれの特性多項式  $P_A(s)$  と  $P_B(s)$  は、次のようなものである。

$$\begin{aligned} P_A(s) &= (s+1)^{10} \\ &= s^{10} + 10s^9 + 45s^8 + 120s^7 + 210s^6 + 252s^5 \\ &\quad + 210s^4 + 120s^3 + 45s^2 + 10s + 1. \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} P_B(s) &= (s+1)^{10} - 32s^5 \\ &= s^{10} + 10s^9 + 45s^8 + 120s^7 + 210s^6 + 220s^5 \\ &\quad + 210s^4 + 120s^3 + 45s^2 + 10s + 1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

$P_A(s)$  は  $s = -1$  に重根を持つ系である。一見して、最悪点は  $a_5 = 252$  であり、 $A = B = 120$ 、 $A + B = 240$ 、 $252/240 = 1.05$  となり、この系は安定であるにも拘らず、リパトフの安定十分条件をみたしていない。この例のように、重根の多い系では、リパトフの安定十分条件は有効ではないので注意が必要である。しかし一般にはこのように重根の多い場合は稀である。 $P_B(s)$  はこれを変更し、安定限界にあるようにしたものである。簡単な計算で  $\pm j$  が根であることがわかる。最悪点は  $a_5 = 220$  であり、 $A = B = 120$ 、 $A + B = 240$ 、 $220/240 = 0.91667$  となり、リパトフの安定十分条件はもちろんのこと、4 次系の安定条件も満たしていないことがわかる。安定限界より僅か安定側に寄せた場合、系が安定であっても、部分 4 次式は安定条件を満たさない。すなわち部分 4 次式の不安定は、系の不安定十分条件にはならないのである。以上幾つかの例により、リパトフの安定・不安定十分条件の応用例を示したが、さらに詳しい例は設計段階で示すことにする。

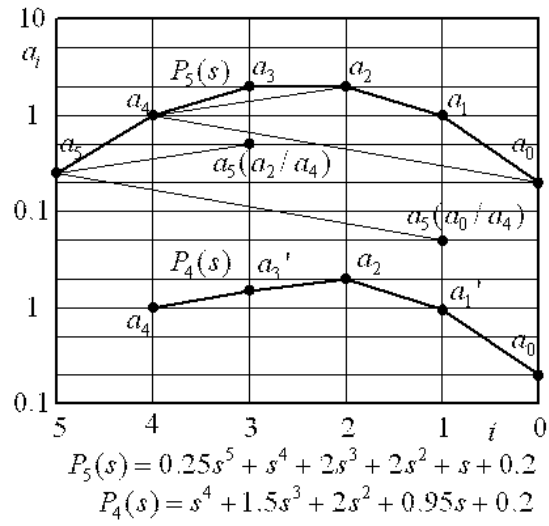


Figure 2.5: Routh stability condition

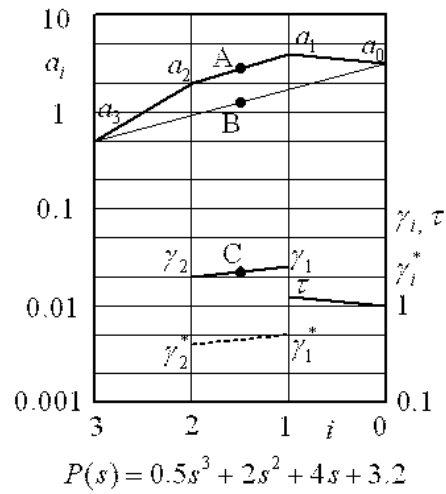


Figure 2.6: Third-order stability condition



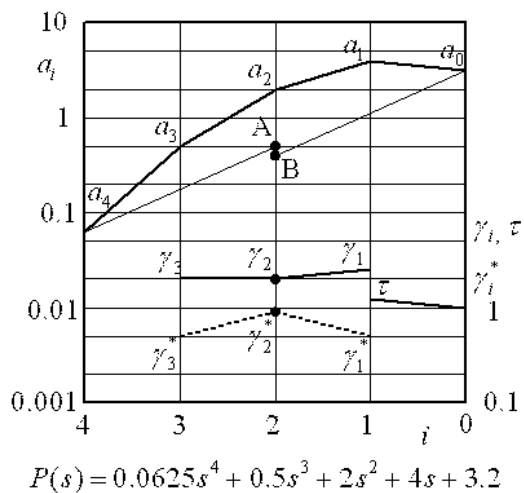


Figure 2.7: Fourth-order stability condition

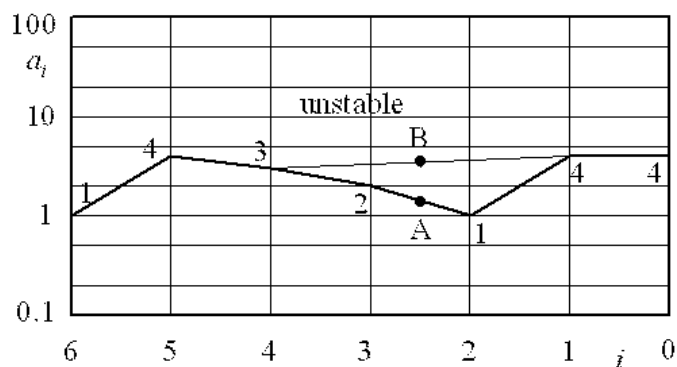


Figure 2.8: Sixth-order example

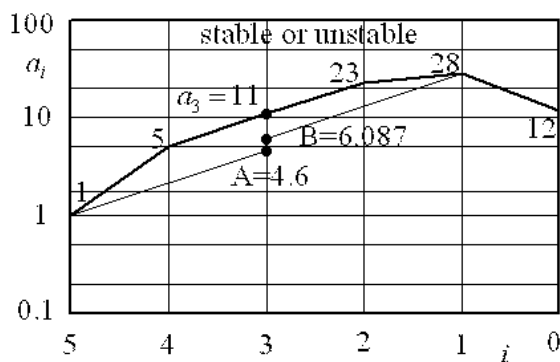


Figure 2.9: Fifth-order example

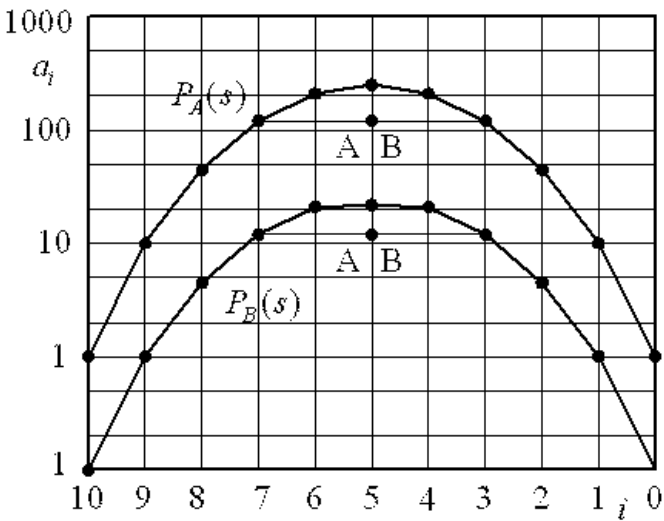


Figure 2.10: Tenth-order example

## 2.4 正準伝達関数

本節では新しく正準伝達関数を導入し、それを媒体として、特性多項式と伝達関数との関係を明らかにすることを試みる。伝達関数は分母項と分子項で構成されている。分母項は特性多項式として与えられるが、分子を定めなければ伝達関数は定まらない。従って特性多項式と伝達関数を関係付けるには、何らかの工夫が必要になる。まず正準伝達関数定義する。これは特性多項式のみから定義される特別の伝達関数で、これを用いれば、一般の伝達関数を総て表現することができる。次にこれを用いて制御系のシステムタイプに関連する伝達関数を求める。これにより開ループ伝達関数を用いる古典制御と係数図法との関係を明らかにする。最後に係数図法形ボード線図を定義し、これと係数図との関係を明らかにする。

正準伝達関数は次のように定義される。特性多項式  $P(s)$  が次のように与えられている。

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0. \quad (2.55)$$

ここで  $i$  次正準伝達関数  $T_i(s)$  を次のように定義する。

$$T_i(s) = \frac{a_i s^i}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \quad (2.56)$$

これを用いれば、一般的な閉ループ伝達関数  $F(s)$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \\ &= \sum_{i=0}^m (b_i/a_i) T_i(s). \end{aligned} \quad (2.57)$$

また二つの正準伝達関数  $T_i(s)$ 、 $T_j(s)$  の和を  $[i, j]$  次の正準伝達関数  $T_{i,j}(s)$  と呼ぶ。すなわち、

$$T_{i,j}(s) = T_i(s) + T_j(s). \quad (2.58)$$

以上は閉ループ伝達関数について論じたものであるが、次に開ループ伝達関数について考える。ある閉ループ伝達関数が与えられると、それに対応する開ループ伝達関数は無数にあるが、ユニティフィードバック系と限定すると一意に定まる。ここで正準伝達関数に対応する、開ループ伝達関数を、正準開ループ伝達関数と呼び、 $G_i(s)$  あるいは  $G_{i,j}(s)$  のように表現する。これらは正準伝達関数と次のような関係で結ばれている。

$$G_i(s) = T_i(s)/[1 - T_i(s)]. \quad (2.59)$$

$$G_{i,j}(s) = T_{i,j}(s)/[1 - T_{i,j}(s)]. \quad (2.60)$$

以上が正準伝達関数についての定義である。

システムタイプは古典制御において、定常誤差の性質に関係して導入された概念であって、システムタイプとして1形系、2形系というように分類されている。目標値がステップ入力の場合、1形系では、出力は誤差0で目標値に整定する。しかし誤差積分値は0にならず有限の値に留まる。一方2形系では、出力は誤差0で目標値に整定するが、このとき誤差積分値も0に整定する。なお通例では、1形系・2形系の説明を、ランプ入力をを用い、次のように説明している。目標値がランプ入力の場合、1形系では、出力の速度は目標値の速度と一致するが、位置には誤差が発生する。2形系では、速度にも位置にも誤差はない。この説明は誤差と誤差積分値を用いる前述の説明と全く等価である。

1形系に属する正準伝達関数は0次で、閉ループ、開ループの伝達関数は次のようになる。

$$T_0(s) = \frac{a_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}. \quad (2.61)$$

$$G_0(s) = \frac{a_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s}. \quad (2.62)$$

2形系に属する正準伝達関数は $[1, 0]$ 次で閉ループ、開ループの伝達関数は次のようになる。

$$T_{1,0}(s) = \frac{a_1 s + a_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}. \quad (2.63)$$

$$G_{1,0}(s) = \frac{a_1 s + a_0}{a_n s^n + \cdots + a_2 s^2}. \quad (2.64)$$

次に $T_0(s)$ が確かに1形系であることを示す。この系の目標値入力を $y_r$ 、出力を $y$ とすると、次の関係がある。

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0)y = a_0 y_r. \quad (2.65)$$

$y_r = 1$ なる場合、 $y$ の定常解は1であるから、誤差は0であることがわかる。次に誤差積分値について考える。入力 $y_r$ の積分値を $y_{rI}$ 、また出力 $y$ の積分値を $y_I$ とする。このとき式(2.65)と同じ形式の関係が得られる。

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0)y_I = a_0 y_{rI}. \quad (2.66)$$

$y_r = 1$ なる場合、 $y_{rI} = t$ であるから、 $y_I$ の定常値が $t - a_1/a_0$ となることは、これを式(2.66)に代入して確かめられる。したがって誤差積分値は次のように、有限値になる。

$$[y_{rI} - y_I]_{steady\ state} = t - (t - a_1/a_0) = a_1/a_0. \quad (2.67)$$

これより  $T_0(s)$  が確かに 1 形系であることが分かる。次に目標値をランプ入力とした場合の説明を行う。この場合、式 (2.65) で、 $y_r = t$  であるから、 $y$  の定常値が  $t - a_1/a_0$  となることは、式 (2.65) に代入することによって確かめられる。すなわち速度は目標値と同じであるが、位置誤差は有限値になる。

$$[y_r - y]_{steady\ state} = t - (t - a_1/a_0) = a_1/a_0. \quad (2.68)$$

このようにステップ入力に対する誤差積分値の関係は、ランプ入力に対する誤差の関係と同じになっている。

続いて  $T_{1,0}(s)$  が、確かに 2 形系であることを示す。この系の目標値入力を  $y_r$ 、出力を  $y$  とすると、次の関係がある。

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0)y = (a_1 s + a_0)y_r. \quad (2.69)$$

$y_r = 1$  なる場合、 $y$  の定常解は 1 であるから、誤差は 0 であることがわかる。誤差積分値については、式 (2.66) と同様に、次の関係を用いて検討する。

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0)y_I = (a_1 s + a_0)y_{rI}. \quad (2.70)$$

$y_r = 1$  なる場合、 $y_{rI} = t$  であるから、 $y_I$  の定常値が  $t$  となることは、式 (2.70) に代入して確かめられる。従って誤差積分値も 0 となるので、確かに 2 形系である。次に目標値をランプ入力とした場合の説明を行う。このとき式 (2.69) で、 $y_r = t$  であるから、 $y$  の定常値が  $t$  となることは、式 (2.69) に代入することによって確かめられる。すなわち速度にも位置にも誤差はないことになる。

最後に係数図法形ボデー線図について説明する。係数図法では、係数図を用い、特性多項式を中心にして設計を進める。一方古典制御では、ボデー線図を用い、開ループ伝達関数を中心にして設計を進める。この両者の関係を明確にすれば、係数図法の設計を古典制御で解釈できることになる。特性多項式が与えられたとき、システムタイプを指定すれば、正準伝達関数の次数が定まり、対応する正準開ループ伝達関数が一意に定まる。これをボデー線図上に表現すると、係数図と等価なボデー線図ができる。ここで係数図とボデー線図の関係をより密にするため、ボデー線図の書き方に工夫を加えたものが、係数図法形ボデー線図である。

先ず  $i$  次折れ点周波数  $\omega_i$  を次のように定義する。

$$\omega_i = a_i/a_{i+1} = 1/\tau_i. \quad (2.71)$$

$i$  次折れ点周波数  $\omega_i$  は、 $i$  次等価時定数  $\tau_i$  の逆数であり、隣り合う折れ点の比は、安定度指標  $\gamma_i$  になる。

$$\gamma_i = \omega_i/\omega_{i-1}. \quad (2.72)$$

次に係数図法形ボーデ線図の定義を示す。一般的な伝達関数  $F(s)$  が次のように表されているとする。

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \quad (2.73)$$

この係数図法形ボーデ線図は  $F(\omega)_{CDM}$  は次のようなものである。

$$F(\omega)_{CDM} = \frac{\max_j (|b_j \omega^j|)}{\max_i (|a_i \omega^i|)}. \quad (2.74)$$

すなわち  $s = \omega$  と置いて、伝達関数の分母・分子の各項の絶対値を計算し、その最大値を与える項で、分母・分子全体を代表させて、周波数応答を求める。結果は折れ線近似ボーデ線図に似たものになるが、折れ点が極・零ではなく、極に対しては  $i$  次折れ点周波数  $\omega_i$ 、零については分子多項式の折れ点周波数になっていることが異なる。

Fig. 2.11 には、システムタイプが 1 形系・2 形系となる正準開ループ伝達関数の、係数図法形ボーデ線図の例を示す。ここで特性多項式  $P(s)$  と、1 形系・2 形系となる正準開ループ伝達関数  $G_0(s) \cdot G_{1,0}(s)$  は次の通りである。

$$P(s) = 0.015625s^5 + 0.125s^4 + 0.5s^3 + s^2 + s + 0.4. \quad (2.75)$$

$$G_0(s) = \frac{0.4}{0.015625s^5 + 0.125s^4 + 0.5s^3 + s^2 + s}. \quad (2.76)$$

$$G_{1,0}(s) = \frac{s + 0.4}{0.015625s^5 + 0.125s^4 + 0.5s^3 + s^2}. \quad (2.77)$$

この図は係数図と 1 対 1 の対応があり、係数図から容易に作図することができる。係数図法的设计結果を、このようなボーデ線図で表現することにより、设计結果の意味を、古典制御の観点から把握することができる。係数図法形ボーデ線図は、通例の折れ線近似ボーデ線図と同程度の近似度を持っている。折れ点付近では、係数図法形ボーデ線図は、折れ線近似ボーデ線図より振幅が小さく現れる。また正確な周波数応答はこの両者の中間にある。

なお Naslin は  $i$  次折れ点周波数  $\omega_i$  を "Characteristic pulsatace" と既に命名している (Naslin, 1968)。しかしこれを直訳すると「特性周波数」となり別の意味になるので、ここでは  $i$  次折れ点周波数と呼ぶこととした。

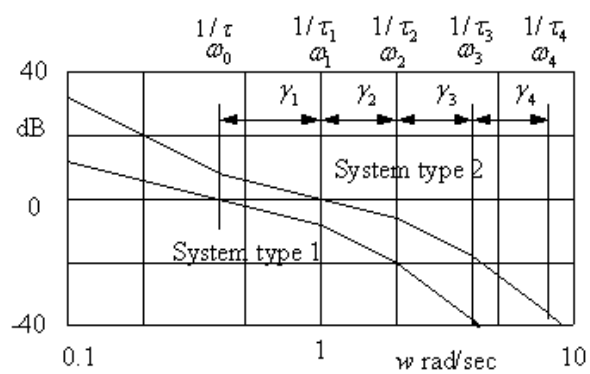


Figure 2.11: Canonical open-loop transfer function

## 2.5 標準形

本節では、係数図法の設計に用いる標準形を示し、それが制御の観点から、大変好ましい特性を持つことを示す。標準形は、制御系設計の経験の中から、自然に生まれてきたものであるが、その結果は、良い制御系の持つべき性質をバランスよく備えている。まず係数図法標準形を示し、そのロバスト性を検討する。つづいてそのステップ応答が良い形であること、また極配置が制御系設計で推奨されているものであることを示す。最後に係数図法標準形の特徴をまとめ、また今まで発表されてきた各種標準形との比較を行う。

係数図法標準形は係数図法の中心であって、次のような安定度指標を基礎としている。

$$\gamma_{n-1} = \cdots = \gamma_2 = 2, \quad \gamma_1 = 2.5. \quad (2.78)$$

このような安定度指標が使われるようになった背景について述べる。安定度指標を設計の尺度として使用する試みはケスラーによって始められ、全ての安定度指標を2とするケスラー標準形が提案された (Kessler, 1960)。この数値は鉄鋼業の圧延制御系設計の中から、経験的に得られたものであるが、現在の知見から振り返って考えると、この選択は「系の安定度を適切に保つこと」と、「特性多項式の全ての係数につき、その変動に対するロバスト性」を保障したことになっていることが分かる。ナスリンも安定度指標を設計に用いているが、ケスラーと異なり、安定度指標を設計目標とするのではなく、応答波形など他の設計目標を達成するための調整パラメータのように用いている。設計例では、1.75~2の値を使用している (Naslin, 1968)。ケスラー標準形の問題点は、そのステップ応答 (正確にはその0次正準伝達関数の応答) に約8%のオーバーシュートが残ることであった。この問題はその後、1次の安定度指標を、 $\gamma_1 = 2.5$ と大きくすることで避けられることが分かり、これを係数図法の標準形として採用した。

係数図法では、特性多項式を係数図に表現して設計を進めているので、標準形を係数図で表現し易い特性多項式の形で表しておくとう便利である。特性多項式の係数は安定度指標、等価時定数、0次の係数を用いて、式(2.7)のように表されるが、参考のため再掲する。

$$a_i = a_0 \tau^i / (\gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \cdots \gamma_2^{i-2} \gamma_1^{i-1}). \quad (2.79)$$

ここで  $a_0 = 0.4$  また  $\tau = 2.5$  と選ぶと、特性多項式  $P(s)$  は、次の形になる。

$$P(s) = 2^{-\frac{(n-2)(n-1)}{2}} s^n + \cdots + 2^{-10} s^6 + 2^{-6} s^5 + 2^{-3} s^4 + 0.5 s^3 + s^2 + s + 0.4. \quad (2.80)$$

この標準形は、係数図上では、中央が上に膨らむ形になり、係数図が書き易い。また相隣る係数の比が次のように規則的なので覚えやすい。

$$a_{i+1}/a_i = 2^{(1-i)}, \quad i = 1 \cdots n - 1. \quad (2.81)$$



また係数図法以外の標準形では、 $a_0 = 1$  また  $\tau = 1$  と選ぶことが多いので、このようにすると、別の形の標準形がえられる。

$$P(s) = 0.1^{n-1} 2^{\frac{(6-n)(n-1)}{2}} s^n + \cdots + 0.00001s^6 + 0.0004s^5 + 0.008s^4 + 0.08s^3 + 0.4s^2 + s + 1. \quad (2.82)$$

この形は係数図で表現すると、左下がりになってしまい使いづらいが、しかし係数は覚えやすい。また相隣る係数の比は次のようになる。

$$a_{i+1}/a_i = 0.1 \times 2^{(3-i)}, \quad i = 1 \cdots n-1. \quad (2.83)$$

係数図は中央が上に膨らむ形が使いやすく、極端に左下がりのときは、 $a_i$  の代わりに  $a_i \times 10^i$  あるいは  $a_i \times 100^i$  を用いるとよい。このような観点から標準形として、 $a_0 = 0.4$ 、 $\tau = 2.5$  のものを用いる。

ロバスト性について検討してみよう。ケスラー標準形の場合、各係数は略 0.5 ~ 3 倍の変化に対して安定である。これは、リパトフの安定条件の代わりに、部分 4 次式の安定条件を近似的には用いてもよいという経験則により説明できる。特性多項式のある係数を小さくするとき、最悪の部分 4 次式はその係数を中心とする部分 4 次式である。一方係数を大きくするとき、その両側の部分 4 次式が最悪になる。ここで部分 4 次式を次のように現す。

$$P_i(s) = a_{i+4}s^4 + a_{i+3}s^3 + a_{i+2}s^2 + a_{i+1}s + a_i. \quad (2.84)$$

また 4 次式の安定条件は式 (2.47) に示すとおりであり、部分 4 次式では次のようになる。

$$a_{i+2} > a_{i+4}(a_{i+1}/a_{i+3}) + a_i(a_{i+3}/a_{i+1}). \quad (2.85)$$

ケスラー標準形では、安定度指標は全て 2 であるから、 $a_0$  と  $\tau$  の適当な変換を行えば部分 4 次式は次の形になる。

$$P_i(s) = 0.5s^4 + 2^{0.5}s^3 + 2s^2 + 2^{0.5}s + 0.5. \quad (2.86)$$

したがって安定条件は次のようになっている。

$$2 > 0.5(2^{0.5}/2^{0.5}) + 0.5(2^{0.5}/2^{0.5}) = 0.5 + 0.5. \quad (2.87)$$

これより、 $a_{i+2}$  を 1/2 にすると不安定になり、 $a_{i+4}$  または  $a_i$  を 3 倍すると不安定になることがわかる。以上がケスラー標準形の場合、各係数は略 0.5 ~ 3 倍の変化に対して安定であることの説明である。実際には多少の誤差があるが、実用的には無視してよい。なお両端の係数の場合は特殊で、 $a_n, a_0$  は 0 倍まで減少してもよく、 $a_{n-1}, a_1$  は 0.26 まで減少してもよい。増加できる限

界は3倍で変わらない。係数図法標準形では  $a_0$  の値が  $\gamma_1$  の比  $2/2.5 = 0.8$  に比例して小さくなっているため、増加できる限界は略4倍になる。また  $a_1$  の減少できる限界は略0.2になる。またナスリンが用いた  $\gamma_i = 1.75$  の場合は各係数の変化許容範囲は略0.65~2倍と狭くなる。

ステップ応答について次に述べる。 $a_0 = 0.4$  及び  $\tau = 2.5$  と選んだ標準形につき、その1形系の正準伝達関数  $T_0(s)$  のステップ応答を、色々の次数について求めたものを、Fig. 2.12 に示す。ここではオーバーシュートは実質的には0で、また次数が異なっても応答波形は変わらない。この性質により、設計者は簡単な制御系から出発して、より複雑な制御系へと円滑に進むことができる。また整定時間は等価時定数の略2.5~3倍になっている。同じ等価時定数を持つ系でシミュレーションを行ってみると、係数図法標準形の整定時間は最も短いようである。なお整定時間については、厳密な定義を行わず、常識的な判断に基づくものとする。

次に2形系の正準伝達関数  $T_{1,0}(s)$  のステップ応答を Fig. 2.13 に示す。これには略40%のオーバーシュートがあるが、2形系では、誤差と同時に、誤差積分も0とする必要があるため、これは必要なオーバーシュートである。応答の形は、次数が異なるときでも、3次以上ではあまり変わらない。また整定時間は1形系と同じく、等価時定数の略2.5~3倍になっている。

極配置について次に述べる。極配置は Fig. 2.14 に示される。ここで3個の最低次極は、縦直線上に並び、2個の最高次極は、負実軸から  $49.5 \text{ deg}$  の線の上に位置する。他の極はこのような縦線と扇形に囲まれた領域の中で、負実軸上かこれに近い領域に集まる。また4次系の場合は、全極が縦直線上に並ぶ。極が縦線と扇形に囲まれた領域にあると良い系となることは、旧くから知られていることである。

全極が縦直線上に並ぶとき、等減衰極配置と呼ぶこととする。この極配置のときの安定度指標とオーバーシュートについて検討しよう。3次系では、オーバーシュートがなくなることが、数学的に証明でき、また4次系では、オーバーシュートがなくなる条件が求められる。3次系では特性多項式は次の形である。

$$\begin{aligned} P(s) &= (s + \alpha)[(s + \alpha)^2 + \beta^2], \\ &= s^3 + 3\alpha s^2 + (3\alpha^2 + \beta^2)s + \alpha(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (2.88)$$

ここで  $\beta^2/\alpha^2 = k$  とおけば、安定度指標は次のようになる。

$$\gamma_2 = 9/(3+k), \quad \gamma_1 = (3+k)^2/[3(1+k)]. \quad (2.89)$$

ここで  $k$  を0から増加させると、 $\gamma_2$  は3から始まって一様に減少するが、 $\gamma_1$  は3から減少して、最低値2.6667をとった後、増加に転じる。このとき  $k = 1$ 、また  $\gamma_2 = 2.25$  である。また  $k = 1.5$  とすると、 $\gamma_2 = 2$ 、 $\gamma_1 = 2.7$  となる。係

数図法標準形では  $\gamma_1 = 2.5$  としているため、複素極は少し虚軸に近くなっている。そのため、3次系では僅かのオーバーシュートが発生する。それにも拘わらず係数図法標準形で  $\gamma_1 = 2.5$  としているのは、特性多項式の次数に関係しない、覚えやすい数値とするためである。

この系の0次正準伝達関数は次のとおりである。

$$T_0(s) = \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(s + \alpha)[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}. \quad (2.90)$$

これを部分分数展開すれば、次のようになる。

$$T_0(s) = \left[ \frac{1}{s + \alpha} - \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right] \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta^2}. \quad (2.91)$$

今入力  $u(t)$  に単位インパルス関数  $\delta(t)$  が加えられたときの出力を  $z(t)$ 、単位ステップ関数  $u_s(t)$  が加えられたときの出力を  $y(t)$  とする。当然のことながら、 $z(t)$  は  $y(t)$  の微分である。ここで  $z(t)$  は式(2.91)をラプラス逆変換して得られる (Franklin, 1994)。また  $y(t)$  は  $T_0(s)/s$  について、同様な方法で求められる。結果は次のとおりである。

$$z(t) = e^{-\alpha t} [1 - \cos \beta t] \alpha(\alpha^2 + \beta^2) / \beta^2. \quad (2.92)$$

$$y(t) = 1 - e^{-\alpha t} [(\alpha^2 + \beta^2) / \beta^2 - (\alpha^2 / \beta^2) \cos \beta t + (\alpha / \beta) \sin \beta t]. \quad (2.93)$$

これより  $z(t)$  は正で決して負になることがないことが分かる。すなわち  $y(t)$  は単調増大でオーバーシュートがないことが分かる。

次に4次系について同じような検討をして見よう。4次系では特性多項式は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(s) &= [(s + \alpha)^2 + \beta_1^2][(s + \alpha)^2 + \beta_2^2], \\ &= (s + \alpha)^4 + (\beta_1^2 + \beta_2^2)(s + \alpha)^2 + \beta_1^2 \beta_2^2, \\ &= s^4 + 4\alpha s^3 + (6 + k_1)\alpha^2 s^2 + (4 + 2k_1)\alpha^3 s + (1 + k_1 + k_2)\alpha^4. \end{aligned} \quad (2.94)$$

ここで  $k_1, k_2$  はつぎのように定義されている。

$$(\beta_1^2 + \beta_2^2) / \alpha^2 = k_1, \quad \beta_1^2 \beta_2^2 / \alpha^4 = k_2. \quad (2.95)$$

ここで、 $k_1 = 2$  とすると、安定度指標はつぎのようになる。

$$\gamma_3 = \gamma_2 = 2, \quad \gamma_1 = 8 / (3 + k_2). \quad (2.96)$$

ここで、 $k_1 = 2$  としているので、 $k_2$  は0から1までの数値しか採れないことは、式(?)より明らかである。これに対応して、 $\gamma_1$  は2.6667から2までの間の値になる。ここで、 $k_2$  が0のとき  $\gamma_1 = 2.6667$ 、0.2のとき  $\gamma_1 = 2.5$  で係数図法標準形になり、1のとき、 $\gamma_1 = 2$  となってケスラー標準形になる。

この系の0次正準伝達関数は次のとおりである。

$$T_0(s) = \frac{(\alpha^2 + \beta_1^2)(\alpha^2 + \beta_2^2)}{[(s + \alpha)^2 + \beta_1^2][(s + \alpha)^2 + \beta_2^2]}. \quad (2.97)$$

これについて3次系と同様な処理を行えば、次の結果をうる。

$$z(t) = te^{-\alpha t} \left[ \frac{\sin \beta_2 t}{\beta_2 t} - \frac{\sin \beta_1 t}{\beta_1 t} \right] \frac{(\alpha^2 + \beta_1^2)(\alpha^2 + \beta_2^2)}{\beta_1^2 - \beta_2^2}. \quad (2.98)$$

$$y(t) = 1 - e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \beta_1^2}{\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)} (\beta_2 \cos \beta_2 t + \alpha \sin \beta_2 t) - e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \beta_2^2}{\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2)} (\beta_1 \cos \beta_1 t + \alpha \sin \beta_1 t). \quad (2.99)$$

ここで  $z(t)$  の式より、 $\beta_2 \ll \beta_1$  ならば、 $z(t)$  は0にならない、従って  $y(t)$  にはオーバーシュートがないことが分かる。実際  $\beta_2 = 0$  は、前述の  $k_2 = 0$  に相当し、 $\gamma_1 = 2.6667$  でオーバーシュートはない。また  $\beta_2 = 0.23607\beta_1$  とすると、 $k_2 = 0.2$  に相当し、 $\gamma_1 = 2.5$  となって係数図法標準形となり、オーバーシュートは見られない。なお  $\beta_2 = \beta_1$  とすると、 $k_2 = 1$  に相当し、 $\gamma_1 = 2$  となってケスラー標準形となり、オーバーシュートが見られるようになる。4次系では3次系と異なり、等減衰極配置は必ずしもオーバーシュート無しを保障するものではない。

正確に計算するとケスラー標準形のオーバーシュートは、3次系で8.15%、4次系で6.24%となり、5次系以上は4次系と同じである。なおケスラー標準形のオーバーシュートは、通例3次系を基にして8%とされている。

ここで係数図法標準形の特徴をまとめて見る。係数図法標準形は次のような、望ましい特性を備えている。

- (1) 特性多項式の個々の係数の変動に対して強いロバスト性を備えている。
- (2) 1形系ではオーバーシュートは殆ど0である。2形系では適切なオーバーシュートが必要で、略40%である。
- (3) 同じ等価時定数  $\tau$  をもつ系の比較では、係数図法標準形の整定時間は最も短いと思われる。整定時間は略  $2.5 \sim 3\tau$  である。
- (4) ステップ応答波形は、特性多項式の次数に関係なく同じである。
- (5) 低次の極は、縦直線上に並ぶ。また高次極は負実軸から  $49.5 \text{ deg}$  の扇形領域にはいる。それらの減衰比  $\zeta$  は0.65より大きい。

## (6) 係数図法標準形は覚えやすい。

換言すれば、係数図法標準形は、「ロバスト性が高い」「オーバーシュートがない」「整定時間が短い」「極が縦線と扇形に囲まれた領域にある」など、経験上「良い制御系」の条件と考えられてきた性質を、総て備えているといえる。

次に各種標準形との比較を行って見よう。これらの標準形は制御理論の中で、色々な観点から推奨されてきたものである。これらの安定度指標が、Table 2.1 にまとめて示されている。このうち Binomial、Butterworth、Bessel、ITAE (Integral-Time-Absolute-Error) では、安定度指標が特性多項式の次数によって変化するが、Kessler、CDM、Kitamori (北森) では変化しない。

Binomial の安定度指標は、 $a_n = a_0 = 1$  と正規化したとき、特性多項式の係数  $a_i$  が  ${}_i C_n$  であることより、次のように表される。

$$\gamma_i = \binom{i+1}{i} \binom{n-i+1}{n-i}. \quad (2.100)$$

Bessel の安定度指標は、 $a_n = 1, \tau = 1$  と正規化したときの特性多項式の係数  $a_i$  が与えられているので (Weinburg, 1962)、これより次のように求められる。

$$\gamma_i = \binom{i+1}{i} \binom{n-i+1}{n-i} \binom{2n-i}{2n-i+1}. \quad (2.101)$$

Butterworth の安定度指標は、 $a_n = a_0 = 1$  と正規化したときの特性多項式の係数比  $a_{i+1}/a_i$  が与えられているので (Weinburg, 1962)、これより次のように求められる。

$$\gamma_i = 1 + \frac{\sin(\pi/n)}{\sin(i\pi/n)}. \quad (2.102)$$

ITAE の安定度指標は、 $a_n = a_0 = 1$  と正規化したときの特性多項式の係数  $a_i$  が与えられているので (Graham, 1953)、これより求められたものである。Kitamori の安定度指標は、 $a_n = 1, \tau = 1$  と正規化した特性多項式の係数  $a_i$  が与えられているので (Kitamori, 1979)、これより求められたものである。

これらについて、 $a_0 = 1, \tau = 1$  と正規化したものにつき、その 1 形系の標準伝達関数  $T_0(s)$  のステップ応答を、色々の次数について求めたものを、Figs. 2.15 ~ 2.21 に示す。

これらの表と図より次のようなことが言える。第 1 にオーバーシュートは安定度指標  $\gamma_1$  に大きく依存することである。これが余裕をもって 2 を超えるならば、Binomial、Bessel、CDM に見るとおり、オーバーシュートはなくなる。

第 2 に CDM は低次では Bessel に似ており、やや高次で Binomial に似ているが、さらに高次になると差異が出てくることである。これは安定度指標

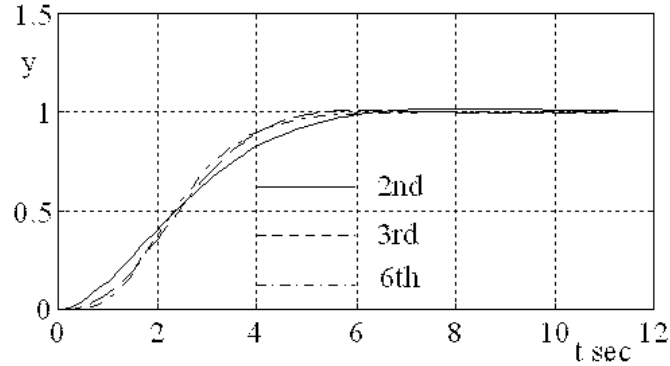


Figure 2.12: Step response, system type 1

でも応答波形でも言えることであるが、その理由は、Binomialも Besselも、 $e^s$  の多項式近似であるためと考えられる。Binomialが  $e^s$  の一つの近似であることは、 $[(s/n + 1)^{n/s}]^s \sim e^s$  より明らかである。Besselはより近似度のよい連分数展開による近似である (Weinburg, 1962)。非常に高次になると、ステップ応答は等価時定数  $\tau = 1$  のむだ時間要素の応答となり、急峻な立ち上がりを示し、整定時間は  $\tau = 1$  と等しくなる。高次になると、Binomialの安定度指標は CDMの安定度指標より小さくなり、Besselではさらに小さくなることは、式 (2.100)(2.101) より明らかである。次数が非常に高いとき、特性多項式の両端の安定度指標 ( $\gamma_{n-1}, \gamma_1$ ) は 2 に近くなるが、中央部の安定度指標 ( $\gamma_i, i \simeq n/2$ ) は 1 に近づいている。CDMでは次数によって安定度指標は変わらない。また応答波形も次数によって変化しない性質を持っている。したがって高次の Binomial や Bessel のようなむだ時間要素の応答を示さないもので、これらとの差異が出てくるのである。

第3に CDMの整定時間は、実用的な意味では、最短であることが挙げられる。極めて高次の Binomial や Bessel では、整定時間は等価時定数  $\tau = 1$  となり、CDMより短くなるが、安定度指標が小さくなっており、ロバスト性に疑問が残るので除外して考えなければならないからである。

Table 2.1: Comparison of stability index

Standard forms	Stability indices				
	$\gamma_5$	$\gamma_4$	$\gamma_3$	$\gamma_2$	$\gamma_1$
Bionomial					4
				3	3
			2.6667	2.25	2.6667
		2.5	2	2	2.5
	2.4	1.875	1.7778	1.875	2.4
Bessel					3
				2.4	2.5
			2.2222	1.9286	2.3333
		2.1429	1.75	1.7778	2.25
	2.1	1.6667	1.6	1.7045	2.2
Butterworth					2
				2	2
			2	1.7071	2
		2	1.6180	1.6180	2
	2	1.5774	1.5	1.5774	2
ITAE					2
				1.4244	2.6414
			1.2971	2.0388	2.1441
		1.568	1.6234	1.7794	2.1018
	1.6004	1.5585	1.5042	1.6339	2.0943
Kitamori		2	1.5	1.6667	2
Kessler	2	2	2	2	2
CDM	2	2	2	2	2.5

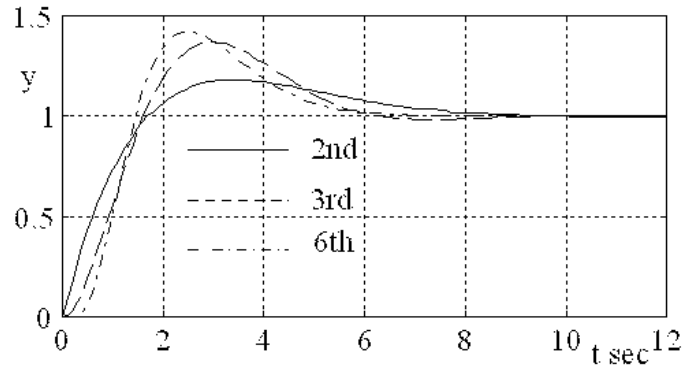


Figure 2.13: Step response, system type 2

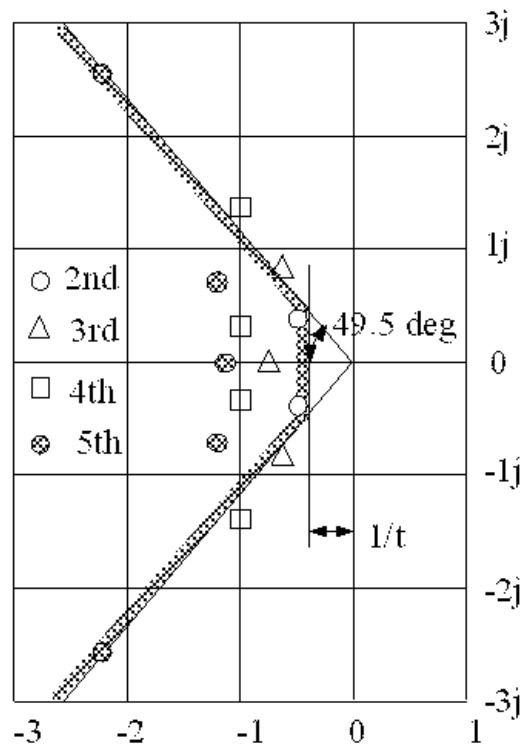


Figure 2.14: Pole location



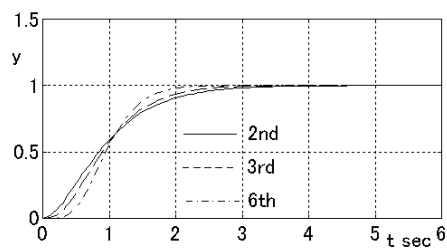


Figure 2.15: Step response, Binomial

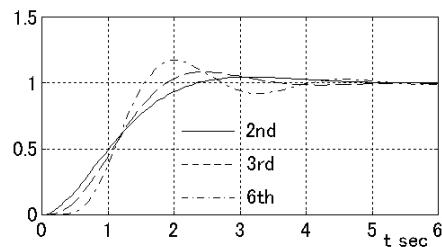


Figure 2.19: Step response, Butterworth

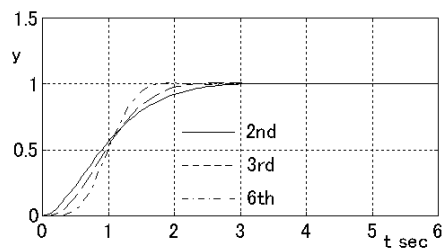


Figure 2.16: Step response, Bessel

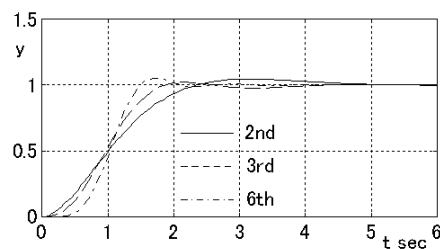


Figure 2.20: Step response, ITAE

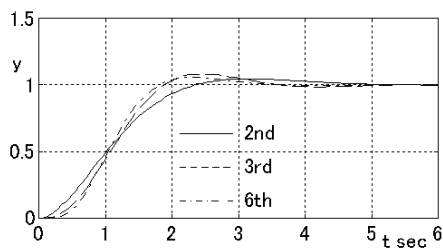


Figure 2.17: Step response, Kessler

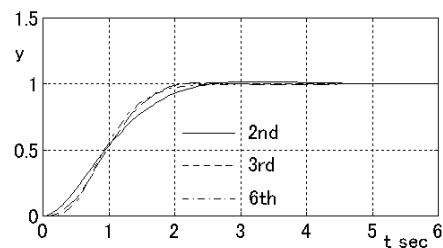


Figure 2.18: Step response, CDM

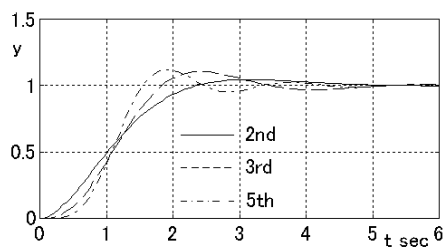


Figure 2.21: Step response, Kitamori

## 2.6 ロバスト性への配慮

前節で係数図法標準形が、制御の観点から、大変好ましい特性を持つことを示した。とくに係数図法標準形が、安定性のみならず、ロバスト性も保障している点を注目したい。しかし特殊な場合には、安定性とロバスト性がトレードオフの関係になり、両者を両立させることが難しくなる。このような時には、係数図法標準形を固執する事は必ずしも得策ではない。このような時、係数図法標準形を修正する基準を与えるのが、本節の目的である。

まず安定性とロバスト性について、その意味を明確にする。次に安定ではあるがロバスト性に欠ける例として多重極の場合を取り上げる。次にロバスト性が欠ける今一つの例として制御器が不安定極・非最小位相零形となる場合について幾つかの例を用いて説明する。最後にこのような条件での係数図法標準形の修正について、具体的な提案を行う。

安定性とロバスト性は、通例の制御では同じような性質と考えられ、安定性の高い系は、ロバスト性も高いのが、通例である。実際古典制御で用いられてきた、位相余裕・ゲイン余裕などの指標は安定性の指標であると同時にロバスト性の指標でもある。簡単に言えば、安定性は極が左半平面で虚軸から、どれだけ離れているかに関係し、ロバスト性は制御対象のパラメータ変動に対して、極がどのように虚軸に近づくかに関係する。従ってパラメータ変動に対する極の動きが一定ならば、安定性が高く、極が虚軸より離れていればいるほど、虚軸に近づくために大きなパラメータ変動を必要とし、ロバスト性が高くなる。

しかしながら、パラメータの変動に対して、極が過敏に動く場合には、安定性が良くても、ロバスト性が低くなる。このような場合の代表的な例の一つは、多重極の場合である。係数図法標準形は、安定性もロバスト性も高いが、これは極が左半平面で適切に分布しているためで、多重極の場合のように、極が集中すると、安定であっても安定度指標は小さくなり、極が過敏に動きロバスト性は低くなる。今一つの例は制御器が不安定極・非最小位相零をもつ場合で、このようなことは、制御対象が大変制御しにくい場合に起こることが多い。このような場合、特性多項式の係数が二つのパラメータの差となり、パラメータの変動に対して、大きく変動する。その結果、特性多項式の係数が係数図法標準形であっても、ロバスト性が不足することになる。このような時、安定度指標を低下させても、制御器から不安定極・非最小位相零を除き、ロバスト性を高めておくことが必要である。安定性とロバスト性がトレードオフの関係になり、両者を同時に満足させることは出来ず、ロバスト性のために安定性を多少犠牲にしなければならない。

まず多重極の場合について考えてみよう。検討を容易にするため、Bino-

mial 標準形について考えてみよう。特性多項式は次のように表される。

$$P(s) = (s+1)^n = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i s^i,$$

$$a_i = {}_i C_n = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \quad (2.103)$$

この系の等価時定数  $\tau$  は  $n$  であり、0 次正準伝達関数は、大きな  $n$  に対しては、遅れ時間  $n$  の時間遅れ要素  $e^{-ns}$  近似されるようになる。この応答にはオーバーシュートはなく、極は  $s = -1$  での  $n$  重極で、極めて安定な系と考えられる。今  $n = 2m$  とし  $a_m$  が  $(1-\delta)a_m$  に変化した場合のロバスト性を考えてみよう。このとき特性根は次式で求められる。

$$(s+1)^{2m} - \delta a_m s^m = 0. \quad (2.104)$$

これが  $s = j, \delta = 2^m/a_m$  なるとき成立することは、簡単な計算で検証できるので、この  $\delta$  が安定限界を与えていることになる。今 Sterling の公式  $n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$  を用いれば、 $\delta$  は次のような近似式で表される。

$$\delta = 2^m/a_m = 2^m(m!)^2/(2m)! \sim \sqrt{\pi/2} \sqrt{n} 2^{-0.5n} = 1.2533 \sqrt{n} 2^{-0.5n}. \quad (2.105)$$

今  $n = 10$  とすると  $\delta = 0.12385$ 、また  $n = 20$  とすると  $\delta = 0.0054736$  となり、ロバスト性が非常に悪くなってしまふ。一般に知られているように、多重極は係数の変化に敏感で動き易いので、安定性がよくてもロバスト性は低くなる。なお Binomial の安定度指標は、前節で示すように  $\gamma_i = [(i+1)/i][(n-i+1)/(n-1)]$  であり、 $a_m$  に対応する安定度指標  $\gamma_m$  は次のようになる。

$$\gamma_m = \left( \frac{m+1}{m} \right)^2. \quad (2.106)$$

ここで  $n = 10, m = 5$  とすれば  $\gamma_5 = 1.44$ 、また  $n = 20, m = 10$  とすれば  $\gamma_{10} = 1.21$  となり、安定度指標はロバスト性の劣化とともに、減少していることが分かる。多重極の場合、安定性は良くても、ロバスト性が悪くなるが、安定度指標を確認しておけば、このような不具合を予知することが出来る。このように安定度指標は安定性のみならず、ロバスト性の指標でもある。

次に制御器が不安定極・非最小位相零形となる場合について幾つかの例を用いて説明しよう。通常系では制御対象・制御器の分母・分子多項式の係数、すなわち系のパラメータは正数である。従って特性多項式の係数は、これらのパラメータの和になっている結果、個々のパラメータの変動割合に比べ、特性多項式の係数の変動割合は同等か小さい。係数図法標準形では係数の変動に対するロバスト性は高いので、パラメータ変動に対するロバ

スト性も十分高いと言える。しかし制御対象・制御器の分母・分子多項式の係数に負数が混じるときは、特性多項式の係数がこれらのパラメータの差になり、パラメータ変動が増幅されて、ロバスト性が一挙に低下することが発生する。このような問題は制御が本質的に難しい制御対象、即ち可制御性・観測性が十分でない、言葉を変えれば望ましくない極の、極零キャンセルに近い状態の制御対象を、制御しようとするとき起こることが多い。また制御対象の自然な姿を無理に変えるような設計を行う時にも、起こり得るものである。

第1の例は、共振・反共振を持つ振動系を1次制御器を用いて制御する場合で、開ループ伝達関数  $G(s)$  と特性多項式  $P(s)$  は次のようになっている。

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k_1s + k_0}{l_1s + 1} \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}, \quad (2.107)$$

$$P(s) = l_1s^4 + (k_1 + 1)s^3 + (2l_1 + k_0)s^2 + (2 + k_1)s + k_0. \quad (2.108)$$

今  $k_1 \geq 0$  の条件で、最小の安定度指標が最大になるような条件を選ぶと、 $\gamma_3 = \gamma_2 = \gamma_1 = \sqrt{3}, k_1 = 0, k_0 = 1.2408, l_1 = 0.31020, \tau = 1.6119$  となる。係数図法標準形  $\gamma_3 = \gamma_2 = 2, \gamma_1 = 2.5$  を選ぶと、 $k_1 = -0.70898, k_0 = 0.7691, l_1 = 0.048868, \tau = 1.6786$  となる。このように係数図法標準形に固執すると、非最小位相零を導入することになり、ロバスト性を悪化させる。この系では安定性とロバスト性の両者を同時に満足させることが出来ず、お互いにトレードオフの関係になっている。両者の妥協点を見つけることが設計の主題で、これは  $k_1$  の選択にかかっている。このようなトレードオフの関係が発生するのは、反共振・共振周波数の二乗の比が  $1:2$  になっているため、これが  $1:3.75$  となると制御し易くなり、 $k_1 = 0$  で係数図法標準形が得られる。このように共振・反共振周波数が近いことが制御しにくくする原因である。

第2の例は、不安定極・非最小位相零をもつ制御対象を1次制御器を用いて制御する場合で、開ループ伝達関数  $G(s)$  と特性多項式  $P(s)$  は次のようになっている。

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k_1s - k_0}{l_1s - 1} \frac{s - 1}{s(s - 2)}, \quad (2.109)$$

$$P(s) = l_1s^3 + (-1 - 2l_1 + k_1)s^2 + (2 - k_1 - k_0)s + k_0. \quad (2.110)$$

この場合は制御器も不安定極・非最小位相零をもつことが必須であり、ロバスト性はもともと悪い。ロバスト性が最も高いのは、 $l_1 \simeq k_0 \simeq 0, k_1 = 1.4142$  の場合で、ループゲインは基準値の  $0.70711$  倍から  $1.4142$  倍の間で安定である。このときは  $\gamma_1 \simeq \gamma_2 \simeq \infty, \tau \simeq \infty$  となって、応答が落ち着くまで無限大の時間がかかる上、 $l_1 \simeq 0$  に対応して、制御器には無限に広い帯域が要請されていることになる。このような無理があるので、実際の設計ではロバスト性を多少犠牲にしても、 $\gamma_2, \gamma_1, \tau$  を適切な範囲に抑える必要がある。今

$k_1 = 1.4142, k_0 = 0.14645, l_1 = 0.051777$  と選ぶと、 $\gamma_2 = \gamma_1 = 4.2426, \tau = 3$  となり、ループゲインは基準値の 0.78578 倍から 1.2726 倍の間で安定である。この設計はロバスト性を犠牲にして応答速度を速め、制御器の帯域を狭くしている。この制御対象は大変制御しにくいので、係数図法標準形よりも大きな安定度指標を与えなければならない。

第 3 の例は、制御対象そのものが、非常に安定な場合である。それに対して幾つかの制御器を設計し特性を比較して見よう。開ループ伝達関数  $G(s)$  と特性多項式  $P(s)$  は次のようになっている。

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k_1s + k_0}{(l_3s^3 + l_2s^2 + s)(s + 10)}, \quad (2.111)$$

$$P(s) = (l_3s^3 + l_2s^2 + s)(s + 10) + k_1s + k_0. \quad (2.112)$$

ここで等価時定数  $\tau = 1$  として設計する。最も簡単な場合は I 制御で、 $l_3 = l_2 = k_1 = 0, k_0 = 10$  の場合である。特性多項式は次のようになる。

$$P(s) = s^2 + 10s + k_0 = s^2 + 10s + 10. \quad (2.113)$$

安定度指標  $\gamma_1 = 10$  となっていて、係数図法標準形よりかなり大きい。ロバスト性は極めて高い。次の設計は  $\gamma_1 = 2.5$  とするために、非最小位相零を導入した PI 制御の場合である。この設計では  $l_3 = l_2 = 0, k_1 = -7.5, k_0 = 2.5$  で、特性多項式は次のようになる。

$$P(s) = s^2 + (10 + k_1)s + k_0 = s^2 + 2.5s + 2.5. \quad (2.114)$$

この場合  $\gamma_1 = 2.5$  は成立しているが、 $k_1$  が負であるため、ロバスト性は大変低くなっている。最後の例はフィルター付き I 制御とよばれるもので、 $l_3 = 0.05, l_2 = 0.3, k_1 = 0, k_0 = 10$  と選んでいる。特性多項式は次のようになる。

$$P(s) = (l_3s^3 + l_2s^2 + s)(s + 10) + k_0 = 0.05s^4 + 0.8s^3 + 4s^2 + 10s + 10. \quad (2.115)$$

この場合  $\gamma_3 = 3.2, \gamma_2 = 2, \gamma_1 = 2.5$  となり、係数図法に近い形になる。この制御器は安定で最小位相形であり、ロバスト性は高い。

このように制御対象そのものが非常に安定な場合、係数図法標準形に固執して、非最小位相零を導入することは、ロバスト性を失うので、避けなければならない。大きすぎる安定度指標はそのまま用いるか、フィルター付き I 制御を用いて、非最小位相零を導入しないような配慮が必要である。

最後に係数図法標準形の修正について述べる。上記の事例から明らかのように、係数図法標準形に固執することが望ましくない場合があり、これをある程度修正する必要がある。安定度指標について、 $\gamma_{n-1} = \gamma_2 = 2, \gamma_1 = 2.5$

とすることは強く推奨されるが、その他については次のように条件を緩和してよい。

$$\gamma_i > 1.5\gamma_i^*, \quad i = 3 \cdots n - 2. \quad (2.116)$$

これは次の条件と等価である。

$$a_i > 1.5 \left( a_{i+2} \frac{a_{i-1}}{a_{i+1}} + a_{i-2} \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} \right), \quad i = 3 \cdots n - 2. \quad (2.117)$$

この場合応答波形は係数図法標準形と略同じにある。また全ての  $\gamma_i$  を 1.5 以上に選ぶと、リパトフの安定十分条件より安定性が必ず保障される。またリパトフは全ての  $\gamma_i$  が 4 以上ならば、特性多項式の根が全て実根であることを証明している (Lipatov, 1978)。従って  $\gamma_i$  を 4 以上にすることは安定過ぎる系を選択することになる。このような観点から、 $\gamma_i$  を 1.5 と 4 の間に選ぶことが推奨される。

一般的に言えば、安定性は特性多項式によって定まるが、ロバスト性は制御器の構造に大きく依存する。従来常識とされてきた「できるだけ非最小位相制御器は避ける」「制御器の次数を出来るだけ小さくする」「制御器の帯域を出来るだけ狭くする」などは、結果的に特性多項式の係数が制御対象・制御器のパラメータの差になることを予防しており、ロバスト性の保障になっているのではないかと思われる。

係数図法による設計では、安定度指標  $\gamma_i$  を賢明に選択することが極めて重要であるが、この選定は色々な観点を総合して初めて行えるものであり、経験が必要なことは言うまでもない。しかしこれはどのような設計問題にも言えることである。

## 2.7 まとめ

本章で述べた重要な点を次にまとめる。まず係数図法で用いる重要なパラメータを定義し、それらの数学的関係を明らかにした。その中で最も重要なパラメータは安定度指標  $\gamma_i$  と等価時定数  $\tau$  であって、さらに限界値  $\gamma_i^*$  が補助的に用いられる。最低次の係数  $a_0$  を 1 と正規化した特性多項式  $P(s)$  は、 $(\tau s)$  のべき乗で展開され、その係数は安定度指標のみで表される。このため等価時定数が時間尺を規定し、安定度指標のみが応答波形を規定することになる。

係数図上では、安定度指標が曲率を定め、等価時定数が傾斜を定める。ロバスト性は安定度指標を小さくすると低下するが、これが大きくても特性多項式と部分多項式が乖離しているとロバスト性は低くなる。係数図より安定性・応答性・ロバスト性を容易に読み取ることが出来る。

係数図法で最もよく用いる安定条件はリパトフの安定十分条件で、すべての部分 4 次式が 1.12 の余裕で安定ならば、全体の安定性が保証される。4 次系の安定条件は安定度指標が限界値より大きいこと示されるが、係数図上での簡単な作図で求めることが出来る。

実際の応答は、特性多項式の他に、分子多項式を定め、伝達関数の形にしなければ求められない。このため特性多項式のみによって定義される正準伝達関数を定義し、その加重和の形で一般の伝達関数を扱うようにした。正準伝達関数より、正準開ループ伝達関数を定義し、係数図法とボーデ線図を用いる古典制御との関係を明らかにした。ここで係数図との関係が密接な係数図法形ボーデ線図を導入している。

実際の設計を容易にするため係数図法標準形を導入した。これは安定度指標のうち、 $\gamma_1$  のみ 2.5 とし、その他はすべて 2 とするものである。これは永年の経験から生まれたものであるが、安定性とロバスト性に優れ、オーバーシュートのない、整定の速い応答を示す。またその極配置も適切である。通例の制御系の設計には、安心して採用できる標準形である。

制御対象が特別の場合、ロバスト性への配慮から係数図法標準形を修正する必要が起こることがある。このとき両端付近の安定度指標 ( $\gamma_{n-1}, \gamma_2, \gamma_1$ ) は標準形のままだに、中間の安定度指標は、限界値の 1.5 倍以上に保つというような選択法がある。また安定度指標は 1.5 から 4 の間に選ぶのが良いとされる。